

OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Autor rozprawy doktorskiej: Frank Fernando Llovera Trujillo

Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim: Dyskretny model neuronu z punktu widzenia teorii układów dynamicznych

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Discrete neuron models from the point of view of dynamical system theory

Język rozprawy doktorskiej: angielski

Promotor rozprawy doktorskiej: Piotr Bartłomiejczyk

Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej: Justyna Signerska-Rynkowska

Data obrony: <dzień, miesiąc, rok>

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polskim: układy dynamiczne, model dyskretny, odwzorowania Lorenza, orbity okresowe, marszruta, przedział obrotu, permutacje Fareya-Lorenza

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim: dynamical systems, discrete model, Lorenz maps, periodic orbits, itinerary, rotation interval, Farey-Lorenz permutations

Streszczenie rozprawy w języku polskim: <streszczenie, maksymalnie 1400 znaków ze spacjami>

Streszczenie rozprawy w języku angielskim: <streszczenie, maksymalnie 1400 znaków ze spacjami>

Streszczenie

Modele neuronowe oparte na iterowaniu odwzorowania są ważnym narzędziem w modelowaniu dynamiki neuronów i mogą być traktowane jako istotna alternatywa dla zwykle bardziej kosztownych obliczeniowo modeli ciągłych lub hybrydowych. Jednak ze względu na ich dyskretną naturę, ich ścisła analiza matematyczna może być trudna. W naszej pracy koncentrujemy się na badaniu dwóch dobrze znanych modeli opartych na odwzorowaniach zarówno od strony teoretycznej jak i numerycznej oraz dostarczamy algorytmy do określania marszrut orbit okresowych.

W *pierwszym* artykule badamy dyskretny model dynamiki neuronalnej wprowadzony przez Chialvo [Chaos, Solitons & Fractals 5, 1995]. W szczególności pokazujemy, że jego zredukowana jednowymiarowa wersja może być traktowana jako niezależny, prosty model aktywności neuronowej, w którym wejście oraz ustalona wartość zmiennej regeneracyjnej stanowią parametry. Ten jednowymiarowy model nadal wykazuje bardzo bogatą i zróżnicowaną dynamikę. Wykorzystując fakt, że odwzorowanie, którego iteracje definiują dynamikę napięcia, jest S-unimodalne, szczegółowo opisujemy zarówno zachowanie okresowe, jak i występowanie różnych rodzajów chaosu, wskazując odpowiadające im regiony w przestrzeni parametrów. Nasze badanie uzupełniamy również analizą bifurkacyjną wspomnianego modelu dynamicznego.

Model Courbage'a, Nekorkina i Vdovina (CNV) jest analizowany w *drugim* artykule. Przeglądamy i rozszerzamy niektóre istniejące wyniki dotyczące β -transformacji oraz rozszerzających odwzorowań typu Lorenza. Następnie stosujemy je do wyprowadzenia istotnych własności sekwencji impulsów (spike-trains) generowanych przez model CNV oraz wyjaśniamy ich implikacje dla zachowania neuronów. W szczególności, wykorzystując najnowsze twierdzenia teorii rotacji dla odwzorowań typu Lorenza, dokonujemy klasyfikacji okresowych wzorców impulsów w tym modelu.

W *trzecim* artykule analizujemy dynamikę modelu CNV, w którym pierwotnie funkcja przedziałami liniowa definiująca dynamikę napięcia zostaje zastąpiona przez wielomian trzeciego stopnia z dodatkowym parametrem kontrolującym nachylenie. Pokazujemy, że na dużym podzbiorze wielowymiarowej przestrzeni parametrów odwzorowanie powrotne dynamiki napięcia jest rozszerzającym odwzorowaniem typu Lorenza. Analizujemy zarówno zachowanie chaotyczne, jak i okresowe tego układu oraz opisujemy złożoność wzorców impulsowania generowanych przez neuron. Osiągamy to poprzez wykorzystanie i rozszerzenie wyników z teorii odwzorowań typu Lorenza oraz ich rozszerzających wariantów.

W *czwartym* artykule, nawiązując do wyników teoretycznych Gellera i Misiurewicza [Int. J. Bifurcation Chaos 28, 2018], przedstawiamy procedurę umożliwiającą określenie marszrut zdecydowanej większości orbit okresowych odwzorowań typu Lorenza. Dostarczamy sprecyzowane algorytmy wraz z gotowymi do użycia narzędziami obliczeniowymi dostępnymi w otwartych repozytoriach. Ponieważ odwzorowania typu Lorenza pojawiają się jako podukłady wielu złożonych modeli i są powszechne w różnych zastosowaniach, nasze wyniki otwierają nowe możliwości badania ich struktury okresowej.

Abstract

Map-based neuron models are an important tool in modelling neural dynamics and sometimes can be considered as an alternative to usually computationally costlier models based on continuous or hybrid dynamical systems. However, due to their discrete nature, rigorous mathematical analysis might be challenging. Overall, we concentrate our work on studying two well-known map based models both theoretically and numerically and provide algorithms for determining itineraries of periodic orbits.

In the *first* article we study a discrete model of neuronal dynamics introduced by Chialvo [Chaos, Solitons & Fractals 5, 1995]. In particular, we show that its reduced one-dimensional version can be treated as an independent simple model of neural activity where the input and the fixed value of the recovery variable are parameters. This one-dimensional model still displays very rich and varied dynamics. Using the fact that the map whose iterates define voltage dynamics is S-unimodal, we describe in detail both the periodic behaviour and the occurrence of different notions of chaos, indicating corresponding regions in parameter space. Our study is also complemented by a bifurcation analysis of the mentioned dynamical model.

The Courbage, Nekorkin and Vdovin (CNV) model is studied in the *second* article with a special focus on the piece-wise linear version. We review and extend some of the existing results concerning β -transformations and (expanding) Lorenz mappings. Then we apply them for deducing important properties of spike-trains generated by the CNV model and explain their implications for neuron behaviour. In particular, using recent theorems of rotation theory for Lorenz-like maps, we provide a classification of periodic spiking patterns in this model.

When the originally piecewise linear function defining voltage dynamics is replaced by a cubic polynomial, with an additional parameter responsible for varying the slope, the CNV model displays interesting dynamics that is addressed in the *third* article. Showing that on a large subset of the multidimensional parameter space the return map of the voltage dynamics is an expanding Lorenz map, we analyze both chaotic and periodic behaviour of the system and describe complexity of spiking patterns fired by a neuron. This is achieved by using and extending some results from the theory of Lorenz-like and expanding Lorenz mappings.

In the *fourth* article, following theoretical findings of Geller and Misiurewicz [Int. J. Bifurcation Chaos 28, 2018], we outline a procedure that allows for determining the itineraries of vast majority of periodic orbits of Lorenz-like maps. We provide explicit algorithms with ready-to-use computational tools available in open repositories. Since Lorenz-like maps arise as subsystems of many complex models and are prevalent in various applications, our results open a way of investigation of their periodic structure.